

Exámenes de Selectividad

Matemáticas II. Cataluña 2018, Convocatoria ordinaria

mentoor.es



Sèrie1

Ejercicio 1. Álgebra

Sean las matrices $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ t & 2 \end{pmatrix}$ y $N = \begin{pmatrix} -1 & t & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

- Calcule $M \cdot N$ y compruebe que la matriz resultante no es invertible.
- Encuentre los valores de t para los cuales la matriz $N \cdot M$ es invertible.

Solución:

- Calcule $M \cdot N$ y compruebe que la matriz resultante no es invertible.

Calculamos el producto de las matrices M (orden 3×2) y N (orden 2×3), resultando en una matriz 3×3 .

$$M \cdot N = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ t & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & t & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+2 & t+0 & 2-2 \\ 0-1 & 0+0 & 0+1 \\ -t+2 & t^2+0 & 2t-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -t+2 & t^2 & 2t-2 \end{pmatrix}.$$

Para comprobar que no es invertible, calculamos su determinante.

$$|M \cdot N| = 1(0 - t^2) - t(-(2t - 2) - (-t + 2)) = -t^2 - t(-2t + 2 + t - 2) = -t^2 - t(-t) = -t^2 + t^2 = 0.$$

Como el determinante es 0 para cualquier valor de t , la matriz no es invertible.

$$M \cdot N = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -t+2 & t^2 & 2t-2 \end{pmatrix}. \text{ No es invertible porque su determinante es 0.}$$

- Encuentre los valores de t para los cuales la matriz $N \cdot M$ es invertible.

Calculamos el producto de N (2×3) y M (3×2), resultando en una matriz 2×2 .

$$N \cdot M = \begin{pmatrix} -1 & t & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ t & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+0+2t & -2-t+4 \\ 1+0-2 & 2+0-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t-1 & -t+2 \\ 1-t & 0 \end{pmatrix}.$$

Para que sea invertible, su determinante debe ser no nulo.

$$|N \cdot M| = (2t - 1)(0) - (-t + 2)(1 - t) = -(-t + 2 - t^2 + 2t) = -(-t^2 + t + 2) = t^2 - t - 2.$$

$$|N \cdot M| = 0 \iff t^2 - t - 2 = 0 \iff (t - 2)(t + 1) = 0. \text{ Las raíces son } t = 2 \text{ y } t = -1.$$

La matriz $N \cdot M$ es invertible para todo $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$.

Ejercicio 2. Geometría

Sea r la recta que pasa por los puntos $A = (0, 1, 1)$ y $B = (1, 1, -1)$.

- Encuentre la ecuación paramétrica de la recta r .
- Calcule todos los puntos de la recta r que están a la misma distancia de los planos $\pi_1 : x + y = -2$ y $\pi_2 : x - 2z = 1$.

Solución:

- Encuentre la ecuación paramétrica de la recta r .

La recta pasa por el punto $A(0, 1, 1)$ y su vector director es $\vec{v} = \vec{AB} = B - A = (1, 0, -2)$.

La ecuación paramétrica es $(x, y, z) = (0, 1, 1) + \lambda(1, 0, -2)$.

- Calcule todos los puntos de la recta r que están a la misma distancia de los planos $\pi_1 : x + y = -2$ y $\pi_2 : x - 2z = 1$.

Un punto genérico de r es $P(\lambda, 1, 1 - 2\lambda)$.

La condición es $d(P, \pi_1) = d(P, \pi_2)$, con $\pi_1 : x + y + 2 = 0$ y $\pi_2 : x - 2z - 1 = 0$.

$$\frac{|\lambda + 1 + 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{|\lambda - 2(1 - 2\lambda) - 1|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} \implies \frac{|\lambda + 3|}{\sqrt{2}} = \frac{|5\lambda - 3|}{\sqrt{5}}.$$

$\sqrt{5}|\lambda + 3| = \sqrt{2}|5\lambda - 3|$. Elevando al cuadrado: $5(\lambda^2 + 6\lambda + 9) = 2(25\lambda^2 - 30\lambda + 9)$. $5\lambda^2 + 30\lambda + 45 = 50\lambda^2 - 60\lambda + 18 \implies 45\lambda^2 - 90\lambda - 27 = 0 \implies 5\lambda^2 - 10\lambda - 3 = 0$.

$$\lambda = \frac{10 \pm \sqrt{100 + 60}}{10} = 1 \pm \frac{\sqrt{160}}{10} = 1 \pm \frac{2\sqrt{10}}{5}.$$

Hay dos puntos, correspondientes a $\lambda = 1 \pm \frac{2\sqrt{10}}{5}$.

Ejercicio 3. Análisis

Sea la función $f(x) = x^3 - x^2$.

- Encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica y que es paralela a la recta de ecuación $x + 3y = 0$.
- Calcule, si existen, los puntos de la gráfica en que la función presenta un máximo o mínimo relativo o un punto de inflexión.

Solución:

- Encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica y que es paralela a la recta de ecuación $x + 3y = 0$

La pendiente de $x + 3y = 0 \implies y = -x/3$ es $m = -1/3$. Buscamos los puntos donde $f'(x) = -1/3$.

$$f'(x) = 3x^2 - 2x \implies 3x^2 - 2x = -1/3 \implies 9x^2 - 6x + 1 = 0 \implies (3x - 1)^2 = 0.$$

La única solución es $x = 1/3$. El punto de tangencia es $(1/3, f(1/3)) = (1/3, -2/27)$. La recta tangente es $y - (-2/27) = -1/3(x - 1/3) \implies y + 2/27 = -x/3 + 1/9 \implies y = -x/3 + 1/27$.

La ecuación de la recta tangente es $y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{27}$.

- Calcule, si existen, los puntos de la gráfica en que la función presenta un máximo o mínimo relativo o un punto de inflexión.

Extremos relativos: $f'(x) = 3x^2 - 2x = x(3x - 2) = 0 \implies x = 0, x = 2/3$.

$$f''(x) = 6x - 2.$$

$$f''(0) = -2 < 0 \implies \text{Máximo relativo en } (0, 0).$$

$$f''(2/3) = 4 - 2 = 2 > 0 \implies \text{Mínimo relativo en } (2/3, -4/27).$$

Punto de inflexión: $f''(x) = 6x - 2 = 0 \implies x = 1/3$.

$f'''(x) = 6 \neq 0$, por tanto es un punto de inflexión.

El punto es $(1/3, -2/27)$.

Máximo en $(0,0)$, Mínimo en $(2/3, -4/27)$.
Punto de inflexión en $(1/3, -2/27)$.



Ejercicio 4. Geometría

Considere los puntos $P = (3, -2, 1)$, $Q = (5, 0, 3)$, $R = (1, 2, 3)$ y la recta $r : \begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ 2y + 3z - 5 = 0 \end{cases}$.

- Determine la ecuación general (es decir, que tiene la forma $Ax + By + Cz = D$) del plano que pasa por P y Q y es paralelo a la recta r.
- Dados el pla $x + 2y + m \cdot z = 7$ y el pla que pasa por P, Q i R, encuentre m para que sean paralelos y no coincidentes.

Solución:

- Determine la ecuación general (es decir, que tiene la forma $Ax + By + Cz = D$) del plano que pasa por P y Q y es paralelo a la recta r.

El plano π está definido por un punto, P, el vector $\vec{PQ}$, y el vector director de la recta r, $\vec{v}_r$.

Vector $\vec{PQ} = Q - P = (2, 2, 2)$, podemos usar el proporcional $(1, 1, 1)$.

Vector $\vec{v}_r$:

$$\vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (3, -3, 2).$$

La ecuación del plano es:

$$\begin{vmatrix} x-3 & y+2 & z-1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

$$(x-3)(5) - (y+2)(-1) + (z-1)(-6) = 0 \implies 5x - 15 + y + 2 - 6z + 6 = 0 \implies 5x + y - 6z - 7 = 0.$$

La ecuación del plano es $5x + y - 6z = 7$.

- Dados el pla $x + 2y + m \cdot z = 7$ y el pla que pasa por P, Q i R, encuentre m para que sean paralelos y no coincidentes.

Primero, hallamos el plano π_{PQR} . Usamos el punto P y los vectores $\vec{PQ} = (2, 2, 2)$ y $\vec{PR} = (-2, 4, 2)$.

El vector normal es $\vec{n} = \vec{PQ} \times \vec{PR} = (-4, -8, 12)$. Podemos usar el proporcional $(1, 2, -3)$.

El plano es $x + 2y - 3z + D = 0$. Pasa por P(3,-2,1): $3 + 2(-2) - 3(1) + D = 0 \implies D = 4$. El plano es $\pi_{PQR} : x + 2y - 3z = 4$.

Para que este plano sea paralelo a $\pi' : x + 2y + mz = 7$, sus vectores normales deben ser proporcionales:

$$\frac{1}{1} = \frac{2}{2} = \frac{-3}{m} \implies m = -3.$$

Como $D = 4 \neq D' = 7$, no son coincidentes.

El valor es $m = -3$.



Ejercicio 5. Análisis

Sea la función $f(x) = \sqrt{x} + x - 2$.

- Compruebe que la función $f(x)$ cumple el enunciado del teorema de Bolzano en el intervalo $[0, 2]$ y que, por tanto, la ecuación $f(x) = 0$ tiene alguna solución en el intervalo $(0, 2)$. Compruebe que $x = 1$ es una solución de la ecuación $f(x) = 0$ y razone, teniendo en cuenta el signo de $f'(x)$, que la solución es única.
- A partir del resultado final del apartado anterior, encuentre el área limitada por la gráfica de la función $f(x)$, el eje de las abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = 1$.

Solución:

- Compruebe que la función $f(x)$ cumple el enunciado del teorema de Bolzano en el intervalo $[0, 2]$ y que, por tanto, la ecuación $f(x) = 0$ tiene alguna solución en el intervalo $(0, 2)$. Compruebe que $x = 1$ es una solución de la ecuación $f(x) = 0$ y razone, teniendo en cuenta el signo de $f'(x)$, que la solución es única.

Teorema de Bolzano:

- $f(x)$ es continua en $[0, 2]$.
- $f(0) = -2 < 0$ y $f(2) = \sqrt{2} > 0$.

Se cumplen las hipótesis, por tanto existe una raíz en $(0, 2)$.

Comprobamos $x = 1$: $f(1) = \sqrt{1} + 1 - 2 = 0$. Es solución.

Para la unicidad, estudiamos la derivada: $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 1$.

Para $x \in (0, 2)$, $f'(x) > 0$. Esto significa que la función es estrictamente creciente en el intervalo, por lo que solo puede cortar el eje una vez.

La solución $x = 1$ es única porque la función es estrictamente creciente.

- A partir del resultado final del apartado anterior, encuentre el área limitada por la gráfica de la función $f(x)$, el eje de las abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = 1$.

En $[0, 1]$, $f(x) < 0$. El área es $A = \int_0^1 -f(x)dx = \int_0^1 (-\sqrt{x} - x + 2)dx$.

$$A = \left[-\frac{x^{3/2}}{3/2} - \frac{x^2}{2} + 2x \right]_0^1 = \left[-\frac{2}{3}x\sqrt{x} - \frac{x^2}{2} + 2x \right]_0^1 = -\frac{2}{3} - \frac{1}{2} + 2 = \frac{-4 - 3 + 12}{6} = \frac{5}{6}.$$

El área es $\frac{5}{6}$ u².

Ejercicio 6. Álgebra

Unos estudiantes de bachillerato han programado una hoja de cálculo como la de la figura siguiente que da la solución de un sistema de ecuaciones compatible determinado de una manera automática:

- Escriba el sistema y compruebe que los valores propuestos como solución son correctos.
- ¿Qué valor se tendría que poner en lugar del 2 que está enmarcado en la imagen, correspondiente a la celda E8 de la matriz de coeficientes (a_{33}), para que el sistema fuera incompatible?

The screenshot shows a spreadsheet with the following content:

	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
2										
3										
4										
5										
6		x	y	z						
7		1	2	-1	-6					
8		1	-1	-2	-3					
9		2	1	2	6					
10										
11										
12										

Below the table, the text "sistema: COMPATIBLE DETERMINAT" is displayed. To the right of the table, the solutions are shown in boxes:

$x = 1$
 $y = -2$
 $z = 3$

Solución:

- Escriba el sistema y compruebe que los valores propuestos como solución son correctos.

El sistema es:
$$\begin{cases} x + 2y - z = -6 \\ x - y - 2z = -3 \\ 2x + y + 2z = 6 \end{cases}.$$

Comprobamos la solución $(1, -2, 3)$: $1 + 2(-2) - 3 = 1 - 4 - 3 = -6$. $1 - (-2) - 2(3) = 1 + 2 - 6 = -3$. $2(1) + (-2) + 2(3) = 2 - 2 + 6 = 6$.

El sistema es correcto y la solución es válida.

- ¿Qué valor se tendría que poner en lugar del 2 que está enmarcado en la imagen, correspondiente a la celda E8 de la matriz de coeficientes (a_{33}), para que el sistema fuera incompatible?

El nuevo sistema es
$$\begin{cases} x + 2y - z = -6 \\ x - y - 2z = -3 \\ 2x + y + kz = 6 \end{cases}.$$

Para que sea incompatible, el determinante de la nueva matriz A' debe ser cero.

$$|A'| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & k \end{vmatrix} = 1(-k + 2) - 2(k + 4) - 1(1 + 2) = -k + 2 - 2k - 8 - 3 = -3k - 9.$$

$$|A'| = 0 \implies -3k - 9 = 0 \implies k = -3.$$

Para $k = -3$, $\text{Rg}(A') = 2$. El rango de la ampliada es 3. El sistema es incompatible.

Se tendría que poner el valor $k = -3$.

Sèrie1

Ejercicio 1. Álgebra

Considere el sistema de ecuaciones lineales
$$\begin{cases} 6x + 3y + 2z = 5 \\ 3x + 4y + 6z = 3 \\ x + 3y + 2z = m \end{cases} \quad \text{para } m \in \mathbb{R}.$$

- Explique razonadamente que para cualquier valor del parámetro m el sistema tiene una única solución.
- Resuelva el sistema y encuentre la expresión general del punto solución.

Solución:

- Explique razonadamente que para cualquier valor del parámetro m el sistema tiene una única solución.

El sistema tendrá una única solución si es Compatible Determinado.

Esto ocurre si el determinante de la matriz de coeficientes, A , es distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 6(8 - 18) - 3(6 - 6) + 2(9 - 4) = -60 + 0 + 10 = -50.$$

Como $|A| = -50 \neq 0$ independientemente del valor de m , el rango de A es siempre 3.

Por el Teorema de Rouché-Frobenius, el sistema es siempre Compatible Determinado y tiene solución única para todo m .

El sistema tiene solución única porque $|A| = -50 \neq 0$ para todo m .

- Resuelva el sistema y encuentre la expresión general del punto solución.

Resolvemos por la Regla de Cramer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 6 \\ m & 3 & 2 \end{vmatrix}}{-50} = \frac{-10m + 20}{-50} = \frac{m - 2}{5}.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 5 & 2 \\ 3 & 3 & 6 \\ 1 & m & 2 \end{vmatrix}}{-50} = \frac{30m - 60}{-50} = \frac{6 - 3m}{5}.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & m \end{vmatrix}}{-50} = \frac{15m - 25}{-50} = \frac{5 - 3m}{10}.$$

La solución es $\left(\frac{m - 2}{5}, \frac{6 - 3m}{5}, \frac{5 - 3m}{10}\right)$.

Ejercicio 2. Geometría

Sean el plano de ecuación $\pi : x + y - z = 0$ y el punto $P = (2, 3, 2)$.

- Calcule el punto simétrico del punto P respecto del pla π .
- Calcule la ecuación cartesiana (es decir, que tiene la forma $Ax + By + Cz = D$) de los dos planos paralelos a π que están a una distancia $\sqrt{3}$ del punto P.

Solución:

- Calcule el punto simétrico del punto P respecto del pla π .

Recta r perpendicular a π por P: $\vec{v}_r = \vec{n}_\pi = (1, 1, -1)$. $r \equiv (x, y, z) = (2, 3, 2) + \lambda(1, 1, -1)$.

Intersección M de r y π : $(2 + \lambda) + (3 + \lambda) - (2 - \lambda) = 0 \implies 3\lambda + 3 = 0 \implies \lambda = -1$. $M = (1, 2, 3)$.

Punto simétrico $P' = 2M - P = (2, 4, 6) - (2, 3, 2) = (0, 1, 4)$.

El punto simétrico es $P'(0, 1, 4)$.

- Calcule la ecuación cartesiana (es decir, que tiene la forma $Ax + By + Cz = D$) de los dos planos paralelos a π que están a una distancia $\sqrt{3}$ del punto P.

Un plano paralelo es $\pi' : x + y - z + D = 0$. $d(P, \pi') = \frac{|2+3-2+D|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}} = \frac{|3+D|}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$.

$|3 + D| = 3$. $3 + D = 3 \implies D = 0$. (Este es el plano original). $3 + D = -3 \implies D = -6$.

Los dos planos son el que pasa por P y otro. La distancia de P al plano original es $\frac{|2+3-2|}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$. Un plano es $\pi_1 : x + y - z = 0$. El otro es $x + y - z + D = 0$. Los puntos son $P \pm d \cdot \vec{n}_{unitario}$. El segundo plano es $x + y - z - 6 = 0$.

Los planos son $x + y - z = 0$ y $x + y - z - 6 = 0$.

Ejercicio 3. Análisis

Sea la función $f(x) = a \cdot e^{-x^2+bx}$, con $a \neq 0$ y $b \neq 0$.

- Calcule los valores de a y de b que hacen que la función tenga un extremo relativo en el punto $(1,e)$.
- Para el caso $a = 3$ y $b = 5$, calcule la asíntota horizontal de la función f cuando x tiende a $+\infty$.

Solución:

- Calcule los valores de a y de b que hacen que la función tenga un extremo relativo en el punto $(1,e)$.

$$f(1) = e \implies a \cdot e^{-1+b} = e \implies a \cdot e^{b-1} = e^1 \implies \ln(a) + b - 1 = 1 \implies \ln(a) + b = 2.$$

$$f'(x) = a \cdot e^{-x^2+bx}(-2x + b).$$

$$f'(1) = 0 \implies a \cdot e^{-1+b}(-2 + b) = 0. \text{ Como } a, e \neq 0, \text{ entonces } -2 + b = 0 \implies b = 2.$$

$$\text{Sustituyendo: } \ln(a) + 2 = 2 \implies \ln(a) = 0 \implies a = 1.$$

$a = 1, b = 2.$

- Para el caso $a = 3$ y $b = 5$, calcule la asíntota horizontal de la función f cuando x tiende a $+\infty$.

$$f(x) = 3e^{-x^2+5x}. \lim_{x \rightarrow \infty} 3e^{-x^2+5x} = 3e^{\lim_{x \rightarrow \infty} (-x^2+5x)} = 3e^{-\infty} = 0.$$

La asíntota horizontal es $y = 0$.

Ejercicio 4. Análisis

Sabemos que una función $f(x)$ está definida para todos los números reales y que es derivable dos veces. Sabemos también que tiene un punto de inflexión en el punto de abscisa $x = 2$, que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en este punto es $y = -124x + 249$ y que $f(-3) = -4$.

- a) Calcule $f''(2)$, $f'(2)$ y $f(2)$.
- b) Calcule $\int_{-3}^2 f'(x)dx$.

Solución:

- a) Calcule $f''(2)$, $f'(2)$ y $f(2)$.

Punto de inflexión en $x = 2 \implies f''(2) = 0$. La tangente en $x = 2$ es $y = -124x + 249$. La pendiente es $f'(2) = -124$. El punto de tangencia está en la curva: $f(2) = -124(2) + 249 = 1$.

$$\boxed{f''(2) = 0, f'(2) = -124, f(2) = 1.}$$

- b) Calcule $\int_{-3}^2 f'(x)dx$.

Por la Regla de Barrow (Teorema Fundamental del Cálculo):

$$\int_{-3}^2 f'(x)dx = [f(x)]_{-3}^2 = f(2) - f(-3).$$

Conocemos $f(2) = 1$ y $f(-3) = -4$.

$$= 1 - (-4) = 5.$$

$$\boxed{\text{El valor de la integral es 5.}}$$

Ejercicio 5. Geometría

Sean las rectas $r_1 : x - 1 = \frac{y-2}{-1} = z - 5$ y $r_2 : (x, y, z) = (2 - 3\lambda, -1 + \lambda, 2)$.

- Encuentre la ecuación cartesiana (es decir, que tiene la forma $Ax + By + Cz = D$) del plano que contiene la recta r_1 y es paralelo a la recta r_2 .
- Diga qué condición se ha de cumplir para que exista un plano que contenga la recta r_1 y sea perpendicular a la recta r_2 . Con las rectas r_1 y r_2 del enunciado, compruebe si existe un plano que contenga la recta r_1 y sea perpendicular a la recta r_2 .

Solución:

- a) El plano pasa por $P_1(1, 2, 5)$ y tiene vectores directores $\vec{v}_1(1, -1, 1)$ y $\vec{v}_2(-3, 1, 0)$.

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-5 \\ 1 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -(x-1) - 3(y-2) - 2(z-5) = 0.$$

$$-x - 3y - 2z + 17 = 0 \implies x + 3y + 2z = 17.$$

$x + 3y + 2z = 17.$

- b) Para que el plano contenga a r_1 y sea perpendicular a r_2 , el vector director de r_1 debe ser perpendicular al de r_2 . $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = (1, -1, 1) \cdot (-3, 1, 0) = -3 - 1 = -4 \neq 0$. No son perpendiculares, por tanto, no existe tal plano.

Condición: $\vec{v}_1 \perp \vec{v}_2$. No existe tal plano.

Ejercicio 6. Álgebra

Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

- a) Si I es la matriz identidad de orden 3, calcule para qué valores de k la matriz $A + kI$ tiene inversa. Encuentre, si existe, la matriz inversa de $A - 2I$.
 b) Calcule la matriz X que satisface la ecuación $X \cdot A + A^T = 2 \cdot X$, en que A^T es la matriz transpuesta de la matriz A .

Solución:

$$\text{a) } |A + kI| = \begin{vmatrix} -1+k & 0 & 1 \\ 0 & -1+k & 0 \\ 1 & 1 & 1+k \end{vmatrix} = (-1+k)^2(1+k) + (-1)(-1+k) = k^3 - k^2 - k + 1 - k + 1 =$$

$$k^3 - k^2 - 2k + 2. \text{ Tiene inversa si } k^3 - k^2 - 2k + 2 \neq 0. \quad A - 2I = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad |A - 2I| = 6 \neq 0.$$

$$(A - 2I)^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & 3 & 9 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Inversa para } k \notin \{1, \pm\sqrt{2}\}. (A - 2I)^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & 3 & 9 \end{pmatrix}.$$

$$\text{b) } X \cdot A - 2X = -A^T \implies X(A - 2I) = -A^T \implies X = -A^T(A - 2I)^{-1}.$$

$$X = - \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & 3 & 9 \end{pmatrix} = -\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 3 & 5 & 9 \\ 6 & 4 & 12 \end{pmatrix}.$$

$$X = -\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 3 & 5 & 9 \\ 6 & 4 & 12 \end{pmatrix}.$$

